

Fonctions de production représentatives de fonctions à complémentarité stricte

C. Gouriéroux et I. Peaucelle

Volume 64, numéro 2, juin 1988

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/601446ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/601446ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)

1710-3991 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Gouriéroux, C. & Peaucelle, I. (1988). Fonctions de production représentatives de fonctions à complémentarité stricte. *L'Actualité économique*, 64(2), 209–230. <https://doi.org/10.7202/601446ar>

Résumé de l'article

Dans cet article, nous analysons des fonctions de production à complémentarité stricte dans le cas d'entreprises hétérogènes. Nous restreignons pour simplifier au cas de deux facteurs, nous avons: $y_i = \min(a_{1i}x_{1i}, a_{2i}x_{2i})$, où les coefficients techniques a_{1i}, a_{2i} dépendent de l'entreprise i considérée. Il est alors naturel d'introduire la fonction de production moyenne (ou représentative) définie par : $y = g(x_1, x_2) = \min(a_1x_1, a_2x_2)$, où la moyenne est prise sur les coefficients techniques.

Nous commençons par caractériser les fonctions de production pouvant s'interpréter comme fonctions représentatives de fonctions à complémentarité stricte. Nous discutons ensuite la possibilité d'hétérogénéité π sous jacente et appliquons notamment les résultats au cas des fonctions C.E.S.

Finalement nous discutons des notions de plus ou moins grande hétérogénéité regardons comment elles sont liées aux biais d'interprétation sur les coefficients de substitution et nous servons de la famille de fonctions de production obtenues pour construire des comparaisons de distributions de facteurs en terme d'efficacité technique.

FONCTIONS DE PRODUCTION REPRÉSENTATIVES DE FONCTIONS À COMPLÉMENTARITÉ STRICTE

C. GOURIEROUX,

et

I. PEAUCELLE

CEPREMAP

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous analysons des fonctions de production à complémentarité stricte dans le cas d'entreprises hétérogènes. Nous restreignons pour simplifier au cas de deux facteurs, nous avons: $y_i = \text{Min} (a_{1i}x_{1i}, a_{2i}x_{2i})$, où les coefficients techniques a_{1i} , a_{2i} dépendent de l'entreprise i considérée. Il est alors naturel d'introduire la fonction de production moyenne (ou représentative) définie par: $y = g(x_1, x_2) = E_{\pi} \text{Min} (a_1 x_1, a_2 x_2)$, où la moyenne est prise sur les coefficients techniques.

Nous commençons par caractériser les fonctions de production pouvant s'interpréter comme fonctions représentatives de fonctions à complémentarité stricte. Nous discutons ensuite la possibilité d'hétérogénéité π sous jacente et appliquons notamment les résultats au cas des fonctions C.E.S.

Finalement nous discutons des notions de plus ou moins grande hétérogénéité regardons comment elles sont liées aux biais d'interprétation sur les coefficients de substitution et nous servons de la famille de fonctions de production obtenues pour construire des comparaisons de distributions de facteurs en terme d'efficacité technique.

ABSTRACT. — In this paper, we analyse production function with complementary factors for the case of heterogenous firms. As an illustration, we restrict ourselves to the two factors case and we consider the functions: $y_i = \text{Min} (a_{1i} x_{1i}, a_{2i} x_{2i})$, where the technical coefficients vary with the form. Then it is natural to introduce the representative function: $y = g(x_1, x_2) = E_{\pi} \text{Min} (a_1 x_1, a_2 x_2)$, where the average is taken with respect to the technical coefficients. We first characterize the functions which may be interpreted as representative and discuss the possibility to identify the heterogeneity distribution π from the representative production function g . These results are applied to the CES functions. Finally we discuss the notion of more or less heterogenous distribution, we examine how they are linked to heterogeneity biases on the substitution coefficients and we use the obtained family of production technologies to introduce an ordering on the distributions of inputs in terms of technical efficiency.

I. INTRODUCTION

Divers problèmes économiques conduisent à écrire des modèles présentant des non dérivabilités par rapport à certaines variables ou à certains paramètres d'intérêt. Des exemples classiques sont fournis par les modèles de participation féminine, où le salaire perçu dépend des positions respectives du salaire potentiel et du salaire de réserve, par les modèles de déséquilibre, où on observe le minimum de l'offre et de la demande, par les fonctions de production à complémentarité stricte, par les fonctions de demande, lorsque les biens sont soumis à certaines contraintes de disponibilité...

Cette non dérivabilité crée souvent diverses difficultés : elle peut empêcher l'utilisation directe de certains résultats concernant les liens entre problèmes primal et dual, rendre délicate du point de vue numérique l'application automatique de techniques d'estimation comme le maximum de vraisemblance, conduire à modifier des résumés fondés sur les dérivées (taux marginaux, élasticité...).

Une façon de résoudre cette difficulté consiste à « lisser » la fonction initialement non dérivable. Ce lissage est habituellement introduit de façon à avoir une interprétation économique, soit en terme d'agrégation (cas des modèles de déséquilibre) [voir Muellbauer (1978), Malinvaud (1982), Gourieroux-Laroque (1983), Lambert (1984), Gourieroux-Laffont-Monfort (1984), Bode-Koerts-Thurik (1988)], soit en terme de comportement représentatif ou d'hétérogénéité [voir par exemple Chamberlain (1979), Chesher (1984), Chesher-Lancaster (1983), Elbers-Ridder (1982), Heckman (1981), Kiefer (1984)...].

Dans cet article nous développons une telle démarche pour l'analyse des fonctions de production à complémentarité stricte. Nous nous restreignons pour simplifier au cas de deux inputs. Au niveau désagrégé de la firme, la fonction de production s'écrit :

$$y_i = \text{Min}(a_{1i}x_{1i}, a_{2i}x_{2i}) (+ u_i) \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

où i désigne l'indice de la firme, x_{1i} , x_{2i} les quantités d'inputs, y_i la quantité d'output, a_{1i} , a_{2i} les coefficients techniques. Éventuellement on peut introduire un terme résiduel u_i prenant en compte les facteurs oubliés, afin de mener ensuite l'étude statistique du modèle.

Sous cette forme les fonctions de production ne sont pas identifiables à partir de données individuelles, le nombre de coefficients techniques à déterminer étant supérieur au nombre d'observations. On peut alors pour résoudre ce problème faire des hypothèses concernant la répartition des coefficients techniques selon les firmes. Ceci conduit à introduire une distribution de ces coefficients appelée *distribution d'hétérogénéité*.

Le modèle initial est alors modifié en :

$$y_i = \text{Min}(A_{1i}x_{1i}, A_{2i}x_{2i}) (+ u_i) \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

où les variables (A_{1i}, A_{2i}) $i = 1, \dots, n$ sont supposées indépendantes entre elles, indépendantes des erreurs u_i et de même loi. Cette loi de densité $\pi(a_1, a_2)$ peut éventuellement être paramétrée pour faire apparaître certaines caractéristiques θ de l'hétérogénéité : moyennes de A_1 et A_2 , variabilité du rapport A_2/A_1 , ... Si on souhaite estimer cet hyperparamètre θ , on peut remettre sous forme économétrique le modèle (2), c'est-à-dire l'écrire :

$$y_i = \frac{E}{\pi} \text{Min}(A_1 x_{1i}, A_2 x_{2i}) (+ v_i) \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

où la partie déterministe correspond à la production moyenne :

$$\frac{E}{\pi} \text{Min}(A_1 x_{1i}, A_2 x_{2i}) = \int \int \text{Min}(a_1 x_{1i}, a_2 x_{2i}) \pi(a_1, a_2) da_1 da_2,$$

et où le nouveau terme résiduel est donné par :

$$v_i = u_i + \text{Min}(A_{1i} x_{1i}, A_{2i} x_{2i}) - \frac{E}{\pi} \text{Min}(A_1 x_{1i}, A_2 x_{2i}).$$

On a ainsi remplacé les fonctions de production initiales à complémentarité stricte : $\text{Min}(a_{1i} x_{1i}, a_{2i} x_{2i})$ $i = 1, \dots, n$, par une unique fonction utilisée pour toutes les entreprises. Cette fonction donnée par :

$$g(x_1, x_2) = \frac{E}{\pi} \text{Min}(A_1 x_1, A_2 x_2), \quad (4)$$

est dans la suite appelée *fonction de production représentative*.

Dans le paragraphe 2, nous commençons par caractériser les fonctions de production pouvant s'interpréter comme de telles moyennes. Nous montrons que ce sont les fonctions homothétiques de la forme :

$$g(x_1, x_2) = x_2 h(x_1/x_2), \quad (5)$$

où la fonction h est positive dérivable, telle que la dérivée $\frac{dh}{dz}$ soit décroissante et que les conditions limites suivantes : $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) < \infty$ et $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dh(z)}{dz} = 0$ soient satisfaites.

Ceci nous permet de vérifier directement que les fonctions de production à élasticités de substitution constantes admettent des interprétations comme fonctions représentatives de fonctions à complémentarité stricte.

Nous discutons alors la possibilité de retrouver les distributions d'hétérogénéité sous-jacentes à partir de la seule connaissance de la fonction de production représentative. Nous commençons par établir que la distribution d'hétérogénéité n'est pas identifiable et qu'elle ne peut donc être obtenue qu'en ajoutant des contraintes identifiantes. De telles contraintes sont proposées et ceci nous permet notamment d'explicitier des distributions sous-jacentes à la forme C.E.S..

Nous discutons ensuite les résumés usuels concernant la substitution entre inputs lorsqu'ils sont calculés à partir de la fonction représentative. Nous montrons qu'ils conduisent à penser de façon erronée que les biens sont substitués alors qu'ils sont en réalité complémentaires au niveau désagrégé.

Dans le paragraphe III nous nous intéressons à la comparaison des répartitions d'inputs selon les firmes pour le critère d'efficacité technique. Nous construisons un préordre d'efficacité à partir de l'ensemble des fonctions représentatives de fonctions à complémentarité stricte et nous montrons que ce préordre se ramène à l'étude des courbes de Lorenz de distributions déduites des distributions d'inputs.

II- FONCTION DE PRODUCTION REPRÉSENTATIVE DE FONCTIONS A COMPLÉMENTARITÉ STRICTE

II.A- *Forme des fonctions représentatives*

La fonction de production désagrégée est du type :

$$g_{a_1, a_2}(x_1, x_2) = \text{Min} (a_1 x_1, a_2 x_2), \quad (6)$$

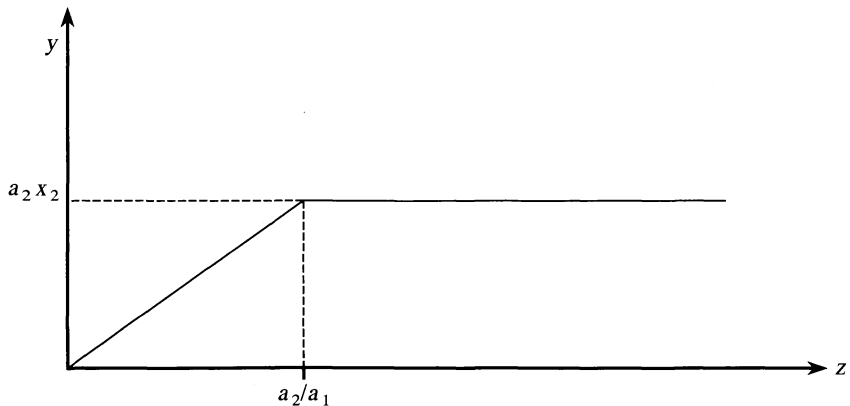
où x_1, x_2 sont les quantités d'inputs et a_1, a_2 les coefficients techniques. On suppose toujours dans la suite que x_1, x_2 sont positifs ainsi que les coefficients a_1, a_2 . La fonction précédente est homogène de degré un et peut donc être réécrite :

$$g_{a_1, a_2}(x_1, x_2) = x_2 \text{Min} (a_2, a_1 \frac{x_1}{x_2}).$$

Il s'agit d'une fonction de x_2 et $z = \frac{x_1}{x_2}$, qui est dérivable par rapport à x_2 et ne

l'est pas par rapport à z au point $z = \frac{a_2}{a_1}$.

VARIATION DE LA PRODUCTION À x_2 FIXÉ



Considérons maintenant n firmes ayant de telles fonctions de production avec des coefficients techniques a_{1i} , a_{2i} et supposons ces firmes indexées de façon que le rapport a_{2i}/a_{1i} soit une fonction croissante de l'indice i . La fonction représentative est alors donnée par :

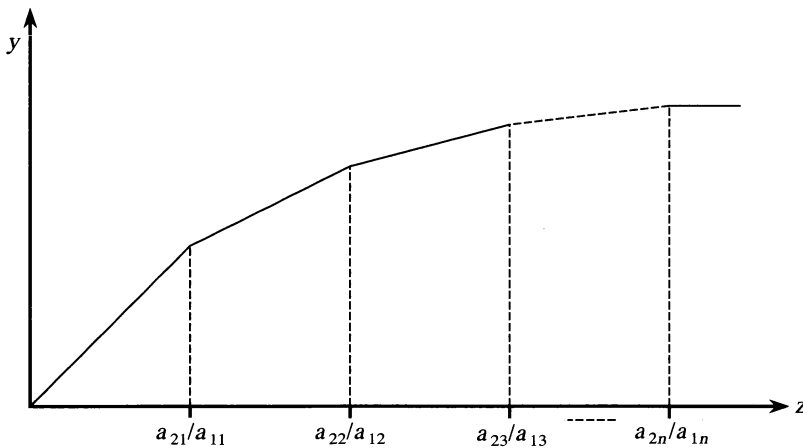
$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Min}(a_{1i}x_1, a_{2i}x_2) \\ &= x_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Min}(a_{2i}, a_{1i} \frac{x_1}{x_2}), \end{aligned}$$

et sa représentation en fonction de $z = \frac{x_1}{x_2}$, à x_2 fixé, correspond à une fonction linéaire par morceaux (voir la figure ci-dessous).

On conçoit alors que, lorsque le nombre de firmes est infiniment grand et qu'il y a un continuum de valeurs possibles du rapport a_2/a_1 , la fonction représentative puisse apparaître dérivable par rapport à z . De plus cette fonction admet vraisemblablement diverses propriétés caractéristiques. Elle se présente sous la forme :

$$g(x_1, x_2) = x_2 h(z) = x_2 h\left(\frac{x_1}{x_2}\right);$$

VARIATION DE LA FONCTION REPRÉSENTATIVE À x_2 FIXÉ



De plus la fonction h devrait être dérivable, croissante et admettre une asymptote parallèle à l'axe des abscisses. Ces propriétés caractéristiques sont résumées ci-dessous et montrées dans l'annexe 1.

PROPRIÉTÉ 1:

Une fonction de production est représentative de fonctions à complémentarité stricte si et seulement si elle s'écrit sous la forme homothétique :

$$g(x_1, x_2) = x_2 h \left(\frac{x_1}{x_2} \right),$$

où h est une fonction positive, dérivable, telle que la dérivée $\frac{dh}{dz}$ soit décroissante, continue à gauche et satisfasse les conditions limites :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) < \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dh(z)}{dz} = 0.$$

Cette propriété permet de savoir immédiatement si une fonction de production donnée a priori peut ou non s'interpréter comme représentative de fonctions à complémentarité stricte.

Considérons ainsi à titre d'exemple une fonction C.E.S. (élasticité de substitution constante) définie par :

$$y = C[\alpha x_1^{-e} + (1-\alpha)x_2^{-e}]^{-1/e}, C > 0, 1 > \alpha > 0, e > 0.$$

Cette fonction est homothétique :

$$y = C x_2 \left[\alpha \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{-e} + (1-\alpha) \right]^{-1/e},$$

et la fonction h est donnée par :

$$h(z) = C [\alpha z^{-e} + (1-\alpha)]^{-1/e}.$$

La première condition limite est satisfaite puisque :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = C(1-\alpha)^{-1/e} < \infty.$$

D'autre part la dérivée de la fonction h est :

$$\frac{dh(z)}{dz} = C \alpha z^{-e-1} [\alpha z^{-e} + (1-\alpha)]^{-(1/e)-1}.$$

On voit alors immédiatement que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dh(z)}{dz} = 0$, ce qui n'est autre que la seconde condition limite. De plus on peut facilement vérifier que cette dérivée est décroissante. On obtient alors le corollaire ci-dessous.

COROLLAIRE 2 :

Toute fonction de production C.E.S. avec $e > 0$, est représentative de fonctions à complémentarité stricte.

II.B- Liens entre la fonction représentative et la distribution d'hétérogénéité

La fonction h permettant de définir la fonction représentative se déduit évidemment de la distribution d'hétérogénéité π des coefficients. Pour établir le lien entre π et h , il nous faut développer l'expression de la fonction g .

Nous avons vu l'intérêt pour décrire la fonction représentative de considérer les nouvelles variables x et $z = \frac{x_1}{x_2}$. Il apparaît maintenant utile d'effectuer le même type de transformation sur les coefficients techniques et d'analyser l'effet de l'hétérogénéité au travers de A_1 et $B = \frac{A_2}{A_1}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= E_{\pi} \text{Min}(A_1 x_1, A_2 x_2) \\ &= E_{\pi} [A_1 x_1 + \text{Min}(0, A_2 x_2 - A_1 x_1)] \\ &= E_{\pi} [A_1 x_1 - A_1 x_1 \text{Max} \left(0, 1 - \frac{A_2}{A_1} \frac{x_2}{x_1} \right)] \\ &= E_{\pi} A_1 \cdot x_1 - E_{\pi} [A_1 x_1 \text{Max} \left(0, 1 - \frac{A_2}{A_1} \frac{x_2}{x_1} \right)] \\ &= E_{\pi} A_1 \cdot x_1 - E_{\pi} [A_1 x_1 \text{Max} \left(0, 1 - B \frac{x_2}{x_1} \right)] \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant introduire la moyenne conditionnelle du coefficient A_1 , lorsqu'est connu le rapport $B = \frac{A_2}{A_1}$ des coefficients techniques. Appliquant la loi des prévisions itérées [voir e.g. Sargent (1979), p. 208], on a :

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= E_{\pi} A_1 \cdot x_1 - E_{\pi} [E(A_1/B) x_1 \text{Max} \left(0, 1 - B \frac{x_2}{x_1} \right)] \\ &= x_1 E_{\pi} A_1 [1 - E_{\pi} \left[\frac{E(A_1/B)}{E A_1} \text{Max} \left(0, 1 - B \frac{x_2}{x_1} \right) \right]]. \end{aligned}$$

Il nous reste à donner une expression plus simple du terme entre crochets. Considérons la fonction des coefficients :

$$\mu(a_1, a_2) = \frac{E(A_1/B = a_2/a_1)}{E(A_1)} \cdot \pi(a_1, a_2).$$

Cette fonction est positive. De plus elle est de masse totale égale à un, puisque :

$$\iint \mu(a_1, a_2) da_1 da_2 = \frac{1}{E_\pi(A_1)} E_\pi[E_\pi(A_1/B)] = \frac{E_\pi(A_1)}{E_\pi(A_1)} = 1.$$

Elle définit donc une loi de probabilité.

Il est alors possible d'introduire la fonction de répartition de $B = A_2/A_1$ pour cette loi. Cette fonction est donnée par :

$$F(b) = \iint_{a_2/a_1 < b} \mu(a_1, a_2) da_1 da_2.$$

La fonction représentative est alors égale à :

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= x_1 E_\pi(A_1) [1 - \int_0^\infty \text{Max} \left(0, 1 - b \frac{x_2}{x_1} \right) dF(b)] \\ &= x_1 E_\pi(A_1) [1 - \int_0^{x_1/x_2} \left(1 - b \frac{x_2}{x_1} \right) dF(b)]. \end{aligned}$$

Intégrant par parties, nous obtenons :

$$g(x_1, x_2) = x_2 E_\pi(A_1) \int_0^{x_1/x_2} [1 - F(U)] dU. \quad (7)$$

Ainsi la fonction représentative dépend de la distribution d'hétérogénéité au travers du coefficient moyen $\frac{E}{\pi} A_1$ et de la loi continue de fonction de répartition F .

Cette dernière a rappelons-le été obtenue en deux étapes :

- modification des pondérations initiales qui sont multipliées par

$$\frac{E_\pi(A_1/B)}{E_\pi(A_1)},$$

- puis calcul de la loi marginale du rapport des coefficients en tenant compte de ces pondérations.

II.C- Identification de la distribution d'hétérogénéité

Connaissant la forme de la fonction de production représentative, on peut se demander s'il est ou non possible de retrouver sans ambiguïté la distribution d'hétérogénéité sous-jacente π . Il s'agit d'un problème d'identification classique.

En fait il est clair que, la distribution initiale étant une loi de deux variables et la fonction représentative ne dépendant que d'un réel $\frac{E}{\pi} A_1$ et de la loi d'une variable F , il ne peut y avoir bijection entre l'ensemble des fonctions représentatives et l'ensemble des distributions d'hétérogénéité. Cette dernière apparaît donc non identifiable.

Il est alors utile de déterminer des contraintes qui pourraient être imposées à la distribution π , de façon à résoudre le problème de non identifiabilité. Nous

allons expliciter de telles contraintes en imposant une condition d'indépendance entre certaines fonctions des coefficients techniques.

Deux distributions d'hétérogénéité π et π^* seront dites *équivalentes pour l'observateur* si et seulement si elles conduisent à la même fonction représentative g . Notant E et E^* les espérances prises par rapport aux lois π et π^* , cette condition d'équivalence s'écrit :

$$EA_1 = E^*A_1 \text{ et } \frac{E(A_1/B)}{EA_1} \cdot \pi = \frac{E^*(A_1/B)}{E^*(A_1)} \pi^*.$$

On a alors le résultat ci-dessous (voir Annexe 2).

PROPRIÉTÉ 3 :

- i) La distribution d'hétérogénéité n'est pas identifiable à partir de la fonction représentative.
- ii) Si la fonction représentative est associée à la distribution d'hétérogénéité π , on peut toujours trouver une distribution π^* équivalente et pour laquelle le coefficient A_1 est indépendant du rapport $B = A_2/A_1$.
- iii) Sous cette contrainte d'indépendance, on peut alors identifier la loi marginale du rapport $B = A_2/A_1$, la moyenne A_1 , mais pas le reste de la loi marginale de A_1 .

Lorsque A_1 et B sont indépendants, on a :

$$\frac{E}{\pi}(A_1/B) = \frac{E}{\pi}A_1, \mu(a_1, a_2) = \pi(a_1, a_2),$$

et la loi F n'est autre que celle du rapport $B = A_2/A_1$.

De plus si x_2 tend vers l'infini, x_1 étant fixé, la quantité $A_2 x_2$ devient infinie alors que $A_1 x_1$ reste fini et on a :

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} g(x_1, x_2) = x_1 EA_1.$$

On voit donc que :

$$EA_1 = \frac{1}{x_1} \lim_{x_2 \rightarrow \infty} g(x_1, x_2). \quad (8)$$

Ceci montre que la moyenne EA_1 est identifiable.

La loi marginale de B peut alors être trouvée de la façon suivante. On remarque que l'expression :

$$\frac{x_1}{x_2} \frac{g(x_1, x_2)}{\lim_{x_2 \rightarrow \infty} g(x_1, x_2)} = \int_0^{x_1/x_2} [1 - F(b)] db \text{ est uniquement une fonction}$$

de $z = \frac{x_1}{x_2}$. Cette fonction peut être dérivée et on a :

$$F\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 1 - \frac{d}{d(x_1/x_2)} \left[\frac{x_1}{x_2} \frac{g(x_1, x_2)}{\lim_{x_2 \rightarrow \infty} g(x_1, x_2)} \right].$$

II.D- Application aux fonctions C.E.S.

Nous avons vu dans le corollaire 2 que toute fonction de production C.E.S. peut s'interpréter comme représentative de fonctions à complémentarité stricte. On peut alors se demander quelles sont les formes des distributions d'hétérogénéité sous-jacentes.

Déterminons d'abord en suivant la démarche du paragraphe précédent la distribution satisfaisant la contraintes d'identification : A_1 et B indépendantes.

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{x_2} \frac{g(x_1, x_2)}{\lim_{x_2 \rightarrow \infty} g(x_1, x_2)} \\ &= \frac{x_1}{x_2} \frac{C x_2 [\alpha \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-e} + (1-\alpha)]^{-1/e}}{C \alpha^{-1/e} x_1} \\ &= \left[z^{-e} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right]^{-1/e}. \end{aligned}$$

On a alors :

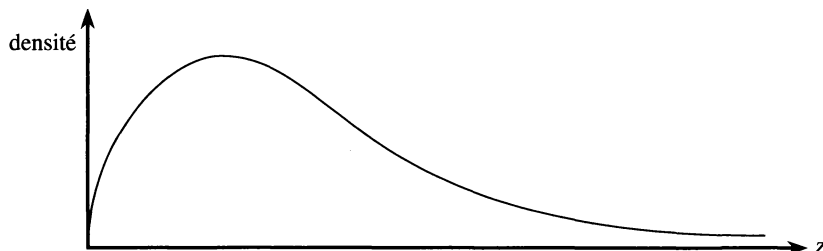
$$\begin{aligned} F(z) &= 1 - \frac{d}{dz} \left[z^{-e} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right]^{-1/e} \\ &= 1 - \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} z^e \right]^{-(1-e)/e}. \end{aligned}$$

Cette distribution est à une homothétie près une distribution de Burr [Burr (1942)].

PROPRIÉTÉ 4 :

La fonction C.E.S. est obtenue comme fonction représentative lorsque A_1 et B sont indépendants et que la loi de B est une distribution de Burr.

La forme de cette distribution relative au rapport des coefficients techniques est décrite ci-dessous :

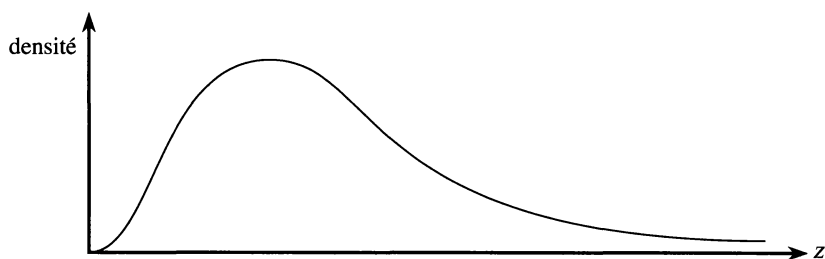


On pourrait également mettre en évidence d'autres distributions d'hétérogénéité sous-jacentes en changeant la contrainte d'identification. Ainsi on pourrait rechercher s'il existe une distribution d'hétérogénéité pour laquelle les deux coefficients techniques sont indépendants et qui conduise à la fonction C.E.S. . La propriété ci-dessous établie dans l'annexe 3 répond à cette question.

PROPRIÉTÉ 5 :

Si les coefficients A_1 et A_2 sont indépendants et tels que $\alpha^{1/e} A_1$ et $(1-\alpha)^{1/e} A_2$ aient la même loi de Weibull de densité : $e x^{e-1} \exp - ex$, alors la fonction représentative associée à une forme C E S .

La répartition des coefficients est décrite ci-dessous :



La dernière propriété que nous avons établie est à rapprocher d'un résultat de même type établi dans le contexte des modèles de déséquilibre [Gourieroux (1984) p. 296, Lambert (1984), Artus (1984), Bleuze-Leroux-Muet (1988), Kooiman (1988)].

Considérant une quantité échangée du type $Q = \text{Min}(D + u, S + v)$, où D et S sont les parties déterministes de l'offre et de la demande et u et v des termes d'erreurs, il a été montré que la quantité moyenne échangée pouvait admettre une forme de type C.E.S. en fonction de D et S pour un choix adéquat de la distribution des erreurs.

II-E- Substituabilité fictive

La détermination des distributions d'hétérogénéité sous-jacentes est évidemment importante au niveau de l'interprétation des paramètres de la fonction C.E.S. . En effet, si cette fonction est utilisée comme fonction représentative, α et e fournissent essentiellement des renseignements sur l'hétérogénéité des firmes ; il faut donc se garder de leur donner leur interprétation usuelle et par exemple de dire que le paramètre $\frac{1}{1+e}$ donne l'élasticité de substitution entre les deux inputs, alors que nous savons que les deux biens sont complémentaires au niveau désagrégé. Cet exemple montre que l'utilisation de fonctions représentatives peut conduire à des biais au niveau de l'interprétation de certains paramètres. On peut d'ailleurs montrer que l'intégration par rapport à une distribution

d'hétérogénéité conduit de façon générale à un accroissement (fictif) des élasticités de substitution [voir Gouriéroux (1988)].

De façon générale, l'élasticité de substitution calculée directement à partir de la fonction représentative dépend essentiellement de la distribution d'hétérogénéité. Elle est donnée par (voir Annexe 4) :

$$\sigma(z) = \frac{\partial \text{Log } z}{\partial \text{Log} \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \right)} = \frac{d \text{Log} \int_0^z [1 - F(u)] du}{d \text{Log} \int_0^z u f(u) du} . \quad (9)$$

On peut facilement étudier sur les exemples comment cette élasticité varie en fonction de la distribution d'hétérogénéité. Examinons ainsi la forme C.E.S. et la distribution de Burr qui lui est associée. La courbe de Lorenz associée à cette distribution a pour équation :

$$L(p) = [1 - (1-p)^{e/(1+e)}]^{(1+e)/e} .$$

On vérifie facilement que cette courbe est une fonction croissante de e . Comme l'élasticité de substitution de la C.E.S. est $\sigma = \frac{1}{1+e}$, on voit que plus l'«hétérogénéité est grande», plus la valeur (fictive) de l'élasticité l'est.

Il est également intéressant de regarder l'autre définition des notions de biens complémentaires et substituables, celle déduite des demandes de facteur. Rappelons que si p_1, p_2 désignent les prix des inputs, si $x_1(p_1, p_2), x_2(p_1, p_2)$ sont les demandes de facteurs, les biens sont dits substitués si la dérivée :

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} \left(= \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \right) \text{ est positive,}$$

qu'ils sont dits complémentaires dans le cas contraire.

Les demandes de facteur sont obtenues en égalant le taux de substitution technique au rapport des prix. On obtient :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} = H(z) ,$$

$$\text{avec : } H(z) = \frac{M(z) - z(1-F(z))}{1 - F(z)} , M(z) = \int_0^z [1 - F(u)] du .$$

On vérifie facilement que la fonction H est continue, strictement croissante dès que la distribution d'hétérogénéité est continue sur R^+ , de densité strictement positive. On peut donc inverser cette fonction et écrire :

$$z = \frac{x_1}{x_2} = H^{-1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

Comme $y = k x_2 M(z) = k x_2 M[H^{-1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)]$, où k est une constante positive, on en déduit la demande du second facteur :

$$x_2 = \frac{y}{k M[H^{-1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)]}.$$

Les deux fonctions M et H^{-1} sont croissantes et il en résulte que x_2 est une fonction croissante de p_1 . Ainsi *les inputs apparaissent comme substitués pour la fonction représentative alors qu'ils sont en réalité complémentaires au niveau désagrégé.*

III- COURBES D'EFFICACITÉ TECHNIQUE

III.A- Comparaison de deux distributions d'inputs

L'ensemble des fonctions de production obtenu en agrégeant par l'intermédiaire de la distribution d'hétérogénéité des fonctions à complémentarité stricte peut servir de base pour comparer les distributions d'inputs entre les entreprises. Supposons en effet que les quantités produites au niveau désagrégé soient données par :

$$y_i = \text{Min} (a_{1i} x_{1i}, a_{2i} x_{2i}), \quad i = 1, \dots, n.$$

La quantité moyenne produite est :

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Min} (a_{1i} x_{1i}, a_{2i} x_{2i}).$$

Faisant tendre vers l'infini le nombre de firmes et supposant les coefficients techniques et les quantités d'inputs distribuées indépendamment, on voit que cette moyenne peut être approchée par :

$$\bar{y} \neq E_{\nu} E_{\pi} \text{Min} (A_1 X_1, A_2 X_2),$$

où π désigne la distribution d'hétérogénéité, c'est-à-dire celle des coefficients techniques A_1, A_2 , et où ν désigne celle des inputs. En pratique sur données microéconomiques les valeurs des quantités x_{1i}, x_{2i}, y_i peuvent être connues, mais celles des coefficients ne le sont généralement pas. Il est alors naturel pour comparer deux distributions d'inputs d'introduire un critère qui soit uniforme dans la distribution d'hétérogénéité. De façon plus précise, on peut suivre l'approche de Farrell (1957) et retenir la définition suivante :

Définition :

Soit ν et ν^* deux distributions d'inputs, de mêmes moyennes :

$$E_{\nu} X_j = E_{\nu^*} X_j, j = 1, 2.$$

ν est dite *techniquement plus efficace* que ν^* , si et seulement si elle permet d'atteindre une production totale supérieure et ceci quelle que soit la distribution d'hétérogénéité des coefficients techniques.

On définit ainsi un préordre sur les distributions d'inputs. ν est préférable à ν^* si et seulement si on a :

$$E_{\nu} E_{\pi} \text{Min} (A_1 X_1, A_2 X_2) \geq E_{\nu^*} E_{\pi} \text{Min} (A_1 X_1, A_2 X_2), \forall \pi.$$

Il s'agit d'un préordre sur des lois à deux dimensions, chacune de ces dimensions correspondant à l'un des inputs.

III.B- Une caractérisation du préordre d'efficacité technique.

La définition retenue pour le préordre d'efficacité technique est pour l'instant peu maniable et on peut se demander s'il n'est pas possible de la remplacer par un critère équivalent qui ne demanderait que la comparaison de deux fonctions numériques simples. Une telle approche est tout à fait analogue à celle habituellement développée pour les préordres d'inégalité (resp. de pauvreté, de concentration) qui se ramènent à une comparaison de courbes de Lorenz (resp. de pauvreté, de concentration) [voir Atkinson (1970), 1987), Bourguignon (1979), Rothschild-Stiglitz (1970), Sheshinski (1972)]. C'est un tel résultat qui est décrit ci-dessous.

PROPRIÉTÉ 6 :

ν est techniquement plus efficace que ν^* si et seulement si la distribution du

$$\text{rapport des inputs } \frac{X_2}{X_1} \text{ relativement à la loi } \frac{E_{\nu^*} \left(X_1 / \frac{X_2}{X_1} \right)}{E_{\nu^*}(X_1)}. \nu^* \text{ apparaît}$$

$$\text{moins concentrée que la distribution de ce rapport relativement à la loi}$$

$$\frac{E_{\nu} \left(X_1 / \frac{X_2}{X_1} \right)}{E_{\nu}(X_1)}. \nu.$$

Preuve : Voir annexe 5.

Il suffit ainsi de construire les deux courbes de Lorenz associées à chacune de ces distributions et de voir si l'une est constamment située en dessous de l'autre.

Ces distributions se déduisent facilement des distributions initiales ν et ν^* . Supposons par exemple que ν soit une loi continue de densité $\nu(x_1, x_2)$. La loi de $X_1, Y = \frac{X_2}{X_1}$ admet pour densité : $x_1 \nu(x_1, x_1 y)$.

On en déduit que :

$$E_v \left(X_1 \mid \frac{X_2}{X_1} \right) = \frac{\int_0^\infty u^2 v(u, uy) du}{\int_0^\infty u v(u, uy) du}, E_v X_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty u^2 v(u, uy) du dy.$$

Finalement la densité associée à v et qui sert au calcul de la courbe de Lorenz est :

$$g(y) = \frac{\int_0^\infty u^2 v(u, uy) du}{\int_0^\infty \int_0^\infty u^2 v(u, uy) du dy}.$$

IV- CONCLUSION

La prise en compte de l'hétérogénéité individuelle est une étape importante en microéconométrie. À partir de l'exemple des fonctions de production à complémentarité stricte, nous avons naturellement été conduits à étudier les propriétés des fonctions représentatives qui leur étaient associés. Nous avons vu que certaines fonctions usuelles comme la fonction C.E.S. admettent des interprétations comme fonction représentative. De plus une étude directe de la fonction représentative peut conduire à des biais d'hétérogénéité, biais qui ont été mis en évidence sur les résumés habituellement utilisés pour décrire les phénomènes de substitution.

Nous avons finalement montré comment ces classes de fonctions représentatives peuvent être utilisées pour construire des relations d'efficacité technique.

La démarche précédente pourrait évidemment être utilisée dans d'autres domaines d'application : modèles de durée, fonctions de demande, modèles de déséquilibre... On pourrait aussi l'étendre en ne supposant plus l'indépendance entre les coefficients techniques et les quantités d'inputs.

BIBLIOGRAPHIE

- ARTUS, P. (1984), « Analyse du marché des biens dans les secteurs industriels ». *Annales de l'INSEE* 55-66, pp. 77-107.
- ATKINSON, A. (1970), « On the Measurement of Inequality », *Journal of Economic Theory* 2, pp. 244-263.
- ATKINSON, A. (1987), « On the Measurement of Poverty », *Econometrica* 55, pp. 749-764.
- BLEUZE, E., LEROUX, V., MUET, P.A. (1988), *Offre, demande et compétitivité industrielle : un modèle économétrique de déséquilibre intégrant des données d'enquêtes*. D.P. OFCE, Paris.
- BODE, B., KOERTS, J., THURIK, A. (1988), *Measuring the Effects of Retail Marketing Instruments using a Switching Model*, D.P. Erasmus University.

- BOURGUIGNON, F. (1979), « Decomposable Income Inequality Measures », *Econometrica* 47, pp. 901-920.
- BURR, I. W. (1942), « Cumulative Frequency Functions », *Annals of Mathematical Statistics* 13, pp. 215-232.
- CHAMBERLAIN, G. (1979), *Heterogeneity, Omitted Variable Bias and Duration Dependence*, Harvard D.P. .
- CHESHER, A. (1984), « Testing for Neglected Heterogeneity », *Econometrica* 52, pp. 865-872.
- CHESHER, A., LANCASTER, T. (1983), « The Estimation of Models of Labour Market Behaviour », *Review of Economic Studies* 50, pp. 609-624.
- ELBERS, C., RIDDER, G. (1982), « True and Spurious Duration Dependence: The Identifiability of the Proportional Hazard Model », *Review of Economic Studies* 49, pp. 403-410.
- FARRELL, M.J. (1957), « The Measurement of Productive Efficiency », *Journal of Royal Statistical Society, A* 120, pp. 253-281.
- GOURIÉROUX, C. (1984), « Économétrie des variables qualitatives », *Economica*, Paris.
- GOURIÉROUX, C., LAFFONT, J.J., MONFORT, A. (1984), « Économétrie des modèles d'équilibre avec rationnement: une mise à jour », *Annales de l'INSEE* 55-56, pp. 5-37.
- GOURIÉROUX, C., LAROQUE, G. (1985), « The Aggregation of Commodities in Quantity Rationing Models », *International Economic Review* 26, n° 3, pp. 681-699.
- GOURIÉROUX, C. (1988), *Hétérogénéité. II. Étude des biais*, D.P. CEPREMAP.
- HECKMAN, J. (1981), *Heterogeneity and State Dependence*. Dans: « *Studies in Labour Markets* », Eds. Rosen, University of Chicago.
- KIEFER, N. (1984), « A Simple Test for Heterogeneity in Exponential Models of Duration », *Journal of Labour Economics* 2, pp. 534-549.
- KOOIMAN, P. (1988), *Some Simulation Results with a Macroeconomic Core Model with Quantity Rationing*, D.P. Rotterdam University.
- LAMBERT, J.P. (1984), *Disequilibrium Macromodels Based on Business Survey Data*, Thèse, Université de Louvain.
- MALINVAUD, E. (1982), *An Econometric Model for Macrodisequilibrium Analysis*, in Hazewinkel and Rinnsay Kan (Eds): « *Current Developments in the Interface Economics, Econometric, Mathematics* », Reidel Publishing Company.
- MUELLBAUER, J. (1978), *Macrotheory vs Macroeconometrics: the Treatment of Disequilibrium in Macromodels*, Birkbeck D.P. 59, Birkbeck College, U.K. .

ROTHSCHILD, M., STIGLITZ, J. (1970), Increasing Risk : II. Its Economic Consequences, *Journal of Economic Theory* 2, pp. 225-243.

SARGENT, T. (1979), *Macroeconomic Theory*, Academic Press, N.Y. .

SHESHINSKI, E. (1972), «Relation between a Social Welfare Function and the Gini Index of Income Inequality », *Journal of Economic Theory* 4, pp. 98-100.

ANNEXE I

DÉMONSTRATION DE LA PROPRIÉTÉ 1

i) Le calcul de la production moyenne (voir formule (7)) :

$$\begin{aligned} Eg(x_1, x_2) &= \frac{E}{\pi} \text{Min}(A_1 x_1, A_2 x_2) \\ &= x_2 \frac{E}{\pi} A_1 \int_0^{x_1/x_2} [1 - F(u)] du \\ &= x_2 \frac{E}{\pi} A_1 M\left(\frac{x_1}{x_2}\right), \end{aligned}$$

n'a évidemment de sens que si les moyennes de A_1 et A_2 existent.

ii) Les conditions à imposer à la fonction h sont alors celles permettant d'interpréter h comme une primitive d'une fonction de survie $1 - F(u)$ (à un coefficient de proportionnalité près) et assurant l'existence des moments de A_1 et A_2 .

Le premier ensemble de conditions est :

h est positive sur R^+ , dérivable, telle que $\frac{dh}{dz}$ soit décroissante, continue à gauche et que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dh(z)}{dz} = 0$.

La condition d'existence des moments implique essentiellement :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) < \infty.$$

ANNEXE 2

IDENTIFICATION DE LA DISTRIBUTION D'HÉTÉROGÉNÉITÉ

Désignons par π la distribution d'hétérogénéité et notons π^B la loi marginale de B associée à la loi $\mu = \frac{E(A_1/B)}{\frac{E}{\pi} A_1} \pi$.

On peut introduire la loi π^* pour laquelle :

- i) la loi marginale de A_1 est la masse ponctuelle en $\frac{E}{\pi} A_1$,
- ii) la loi marginale de B , notée π^{*B} , coïncide avec π^B ,
- iii) A et B sont indépendantes.

Pour ce choix, on a :

$${}^*EA_1 = EA_1.$$

De plus :

$$\frac{\frac{E(A_1/B)}{E(A_1)}}{\pi^*} = \frac{\frac{E(A_1)}{E(A_1)}}{\pi^*} = \pi^*,$$

ce qui implique que les lois marginales de B associées à

$$\frac{\frac{E(A_1/B)}{E(A_1)}}{\pi^*} \text{ et } \frac{E(A_1/B)}{E(A_1)} \pi \text{ coïncident.}$$

π et π^* sont donc équivalentes pour l'observateur.

ANNEXE 3

RECHERCHE DE LA DISTRIBUTION F

i) La densité du couple A_1, A_2 est :

$$\pi(a_1, a_2) = e^2 \alpha a_1^{e-1} \exp - [\alpha a_1^e] (1-\alpha) a_1^{e-1} \exp - [(1-\alpha) a_2^e].$$

Celle de $A_1, B = \frac{A_2}{A_1}$ est alors donnée par :

$$\bar{\pi}(a_1, b) = e^2 \alpha a_1^{e-1} \exp (-\alpha a_1^e) (1-\alpha) a_1^{e-1} b^{e-1} \exp [- (1-\alpha) a_2^e b^e] a_1$$

Comme cette densité ne se sépare pas en produit d'une fonction de a_1 par une fonction de b , les variables A_1 et $\frac{A_2}{A_1}$ ne sont pas indépendantes.

La distribution F doit donc se calculer en évaluant d'abord l'espérance conditionnelle $E(A_1/B)$, puis en recherchant la loi marginale de B correspondant à la distribution :

$$\bar{\pi}(a_1, b) = \frac{E(A_1/B=b)}{EA_1} \bar{\pi}(a_1, b).$$

ii) Évaluons donc l'espérance conditionnelle et pour cela commençons par déterminer la loi marginale de B et la loi conditionnelle de A_1 sachant B . On a :

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(b) &= \int_0^\infty \bar{\pi}(a_1, b) da_1 \\ &= e^2 \alpha (1-\alpha) b^{e-1} \int_0^\infty a_1^{2e-1} \exp - a_1^e [\alpha + (1-\alpha) b^e] da_1 \\ &= [e^2 \alpha (1-\alpha) b^{e-1}] / [\alpha + (1-\alpha) b^e]^2. \end{aligned}$$

La densité conditionnelle de A_1 sachant B s'en déduit immédiatement :

$$\bar{\pi}(a_1/b) = a_1^{2e-1} \exp - (a_1^e [\alpha + (1-\alpha) b^e]) [\alpha + (1-\alpha) b^e]^2.$$

L'espérance conditionnelle est donc :

$$E(A_1/B=b) = \left[\int_0^\infty a_1^{2e} \exp - a_1^e [\alpha + (1-\alpha)b^e] da_1 \right] [\alpha + (1-\alpha)b^e]^2$$

$$\propto \frac{1}{[\alpha + (1-\alpha)b^e]^{1/e}}$$

où le signe \propto signifie : « à une constante multiplicative près ».

iii) La loi $\bar{\pi}$ est donc :

$$\bar{\pi}(a_1, b) \propto \frac{e b^{e-1} a_1^{2e-1} \exp - a_1^e [\alpha + (1-\alpha)b^e]}{[\alpha + (1-\alpha)b^e]^{1/e}}.$$

Intégrant par rapport à a_1 , on en déduit la loi marginale de b associée :

$$\bar{\pi}(b) \propto \frac{e b^{e-1}}{[\alpha + (1-\alpha)b^e]^{(1/e)+2}} \propto \frac{e b^{e-1}}{[\alpha + \frac{1-\alpha}{\alpha} b^e]^{(1/e)+2}}.$$

On remarque alors que c'est exactement la densité associée à la fonction de répartition de la loi de Burr.

ANNEXE 4

CALCUL DE L'ÉLASTICITÉ DE SUBSTITUTION

Nous avons :

$$\sigma(z) = \frac{\partial \text{Log} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)}{\partial \text{Log} \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \right)} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{d}{dz} \text{Log} \{M(z) - z(1 - F(z))\} - \frac{d}{dz} (1 - F(z))},$$

$$\text{avec : } M(z) = \int_0^z [1 - F(u)] du, f(z) = \frac{dF(z)}{dz}.$$

On en déduit que :

$$\sigma(z) = \frac{[1 - F(z)] \{M(z) - z(1 - F(z))\}}{M(z) z f(z)}$$

$$= \frac{1 - F(z)}{\int_0^z [1 - F(u)] du} \frac{\int_0^z u f(u) du}{z f(z)},$$

$$\sigma(z) = \frac{d \text{Log} \int_0^z [1 - F(u)] du}{d \text{Log} \int_0^z u f(u) du}.$$

ANNEXE 5

CARACTÉRISATION DU PRÉORDRE D'EFFICACITÉ TECHNIQUE

La condition pour la comparaison des deux distributions d'inputs ν et ν^*

$$E_{\nu} \frac{E}{\pi} \text{Min}(A_1 X_1, A_2 X_2) \geq E_{\nu^*} \frac{E}{\pi} \text{Min}(A_1 X_1, A_2 X_2), \forall \pi,$$

équivalent à :

$$\frac{E}{\pi} \frac{E}{\nu} \text{Min}(A_1 X_1, A_2 X_2) \geq \frac{E}{\pi} \frac{E}{\nu^*} \text{Min}(A_1 X_1, A_2 X_2), \forall \pi,$$

en intervertissant les espérances.

Cette inégalité uniforme sur les lois π est équivalente à :

$$E_{\nu} \text{Min}(a_1 X_1, a_2 X_2) \geq E_{\nu^*} \text{Min}(a_1 X_1, a_2 X_2), \forall a_1, a_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow E_{\nu} \text{Min}(X_1, \frac{1}{b} X_2) \geq E_{\nu^*} \text{Min}(X_1, \frac{1}{b} X_2), \forall b > 0$$

$$\Leftrightarrow E_{\nu} \text{Min}(0, \frac{1}{b} X_2 - X_1) \geq E_{\nu^*} \text{Min}(0, \frac{1}{b} X_2 - X_1), \forall b > 0.$$

(Cette dernière inégalité résulte de $E_{\nu} X_1 = E_{\nu^*} X_1$).

À ce niveau, on peut reprendre la démarche utilisée auparavant pour intégrer par rapport à la distribution d'hétérogénéité. L'inégalité s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} E_{\nu} \left[\frac{E_{\nu} \left[X_1 / \frac{X_2}{X_1} \right]}{E_{\nu} X_1} \text{Min}(0, \frac{1}{b} \frac{X_2}{X_1} - 1) \right] \\ \geq E_{\nu^*} \left[\frac{E_{\nu^*} \left[X_1 / \frac{X_2}{X_1} \right]}{E_{\nu^*} X_1} \text{Min}(0, \frac{1}{b} \frac{X_2}{X_1} - 1) \right], \forall b > 0. \end{aligned}$$

Notons alors G et G^* les fonctions de répartition de la loi du rapport X_2/X_1 calculées respectivement avec les lois de couples

$$\frac{E_{\nu} \left[X_1 / \frac{X_2}{X_1} = \frac{x_2}{x_1} \right]}{E_{\nu}(X_1)} \cdot \nu \text{ et } \frac{E_{\nu^*} \left[X_1 / \frac{X_2}{X_1} = \frac{x_2}{x_1} \right]}{E_{\nu^*}(X_1)} \cdot \nu^*.$$

Les inégalités précédentes s'écrivent :

$$E_G \text{Min}(0, \frac{Z}{b} - 1) \geq E_{G^*} \text{Min}(0, \frac{Z}{b} - 1), \forall b > 0,$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{b} \int_0^b G(z) dz \geq -\frac{1}{b} \int_0^b G^*(z) dz, \forall b > 0,$$

$$\Leftrightarrow \int_0^b G^*(z) dz \geq \int_0^b G(z) dz, \forall b > 0$$

Cette comparaison des distributions G et G^* est exactement celle de dominance stochastique d'ordre deux ou ordre de concentration [voir e.g. Rothschild-Stiglitz (1970)].

En effet, en plus de l'inégalité que nous venons d'obtenir sur les primitives des fonctions de répartition, nous avons l'égalité des moyennes de G et G^* . Celle-ci résulte de :

$$\frac{EZ}{G} = \frac{E}{v} \left[\frac{X_2}{X_1} \frac{E_v \left[X_1 / \frac{X_2}{X_1} \right]}{E_v(X_1)} \right] = \frac{\frac{E}{v} X_2}{\frac{E}{v} X_1} = \frac{\frac{E}{v^*} X_2}{\frac{E}{v^*} X_1} = \frac{EZ}{G^*}.$$